

MATEMATIKA 1 – TAHÁK

Vzorce pro derivování:

- $(c)' = 0,$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$
- $(e^x)' = e^x,$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x},$
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b},$
- $(\sin x)' = \cos x,$
- $(\cos x)' = -\sin x,$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$
- $(f \pm g)' = f' \pm g',$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f',$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg',$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Další užitečné vzorce:

- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$
- $\log_{g(x)} f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)},$

L'Hospitalovo pravidlo

(jen pro limitu typu $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita podílu derivací existuje.

Taylorův vztah: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$

kde $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ je tzv. Taylorův zbytek. (Taylorův polynom je výraz na pravé straně beze zbytku $R_{n+1}(x)$, který už obecně polynomem být nemusí.)

Vzorce pro asymptotu se směrnicí: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$

Vzorce pro integrování:

- $\int k \, dx = kx + c,$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$
- $\int e^x \, dx = e^x + c,$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0),$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
- $\int \frac{1}{x^2 + A^2} \, dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$
- $\int \frac{1}{x^2 - A^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{x-A}{x+A} \right| + c,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c,$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c,$

Metoda per partes:

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx$$

Substituční metody:

- $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt,$
kde $t = \varphi(x).$
- $\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt,$
kde $x = \varphi(t).$

Rozklad na parciální zlomky:

- Buďte $P(x), Q(x)$ polynomy, st $P(x) < \operatorname{st} Q(x),$
- $Q(x) = a_n \cdot \dots \cdot (x - \alpha_i)^{k_i} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \cdot \dots,$
- kvadratické výrazy $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$ mají záporný diskriminant (a tedy je dále nerozkládáme).
- Pak platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \dots + \frac{A_1}{x - \alpha_i} + \frac{A_2}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x - \alpha_i)^{k_i}} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{M_{l_j} x + N_{l_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}} + \dots$$

- V případě, že st $P(x) \geq \operatorname{st} Q(x),$ upravíme na $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$
kde st $P(x) < \operatorname{st} Q(x).$

Integrace iracionálních funkcí:

- $R(x, \sqrt[n]{ax+b}), t^n = ax+b$
- $R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \dots, \sqrt[n_k]{x}), t^s = x,$
kde $s = \operatorname{nsn}(n_1, n_2, \dots, n_k)$
- $R(x, \sqrt{a^2 - x^2}), x = a \sin t$ nebo $x = a \cos t$
- $R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), x = \frac{a}{\sin t}$ nebo $x = \frac{a}{\cos t}$
- $R(x, \sqrt{x^2 + a^2}), x = a \operatorname{tg} t$ nebo $x = a \operatorname{cotg} t$

Newton–Leibnizova formule:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ kde } F'(x) = f(x)$$

Objem rotačního tělesa a délka křivky:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx, \ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Integrace parciálních zlomků:

- $\int \frac{A}{ax+b} \, dx, t = ax+b$
- $\int \frac{A}{(ax+b)^n} \, dx, t = ax+b$
- $\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \, dx,$ kde $D < 0.$ Rozdělit na $\int \frac{f'(x)}{f(x)}$ a zbytek, jehož jmenovatel doplnit na čtverec.
- $\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} \, dx,$ kde $D < 0.$ Po úpravě (rozdělit zlomek, ...) obrácená metoda per partes, ... dostaneme zlomky nižších typů.

Eulerovy substituce pro funkci $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$:

- pro $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta),$ kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R},$
volíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$
- pokud $a > 0,$ volíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} \pm t$
- jestliže $c > 0,$ klademe $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$

Iracionální funkce typu $R(\sin x, \cos x)$:

- pro lichou funkci vůči $\sin x,$ volíme $t = \cos x$
- pro lichou funkci vůči $\cos x,$ volíme $t = \sin x$
- pro sudou funkci vůči $\sin x$ i $\cos x,$ volíme $t = \operatorname{tg} x$
- jinak univerzální substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Nutná podmínka konvergence:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Srovnávací kritérium:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

Integrální kritérium:

Nechť f je definovaná na $\langle 1, \infty \rangle$, kladná a klesající,

$a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- konverguje, právě když konverguje $\int_1^{\infty} f(x) dx$.
- diverguje, právě když diverguje $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Vzorce pro poloměr konvergence mocninné řady:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \text{ nebo } r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Vybrané číselné řady:

- Lomená kvadratická řada (konverguje absolutně):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$
- Harmonická řada (diverguje určitě):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty$$
- Leibnizova řada (konverguje neabsolutně):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots = \ln 2$$
- Grandiho řada (diverguje – osciluje):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \text{Neex}$$

Odmocninové kritérium:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Jestliže

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada konverguje.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada diverguje.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nelze rozhodnout.

Podílové kritérium:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Jestliže

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, řada konverguje.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada diverguje.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nelze rozhodnout.

Leibnitzovo kritérium:

Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, b_n > 0$, nerostoucí, konverguje, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

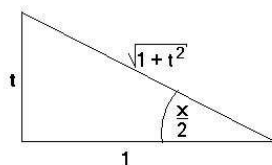
Vybrané mocninné řady:

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1)$
- $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$

POMŮCKY

Goniometrické vzorce:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Univerzální substitute $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos \frac{x}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

**Hodnoty goniometrických funkcí:
(1. kvadrant)**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	0	1	0	ndef
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ndef	0

Součet nekonečné geometrické řady:

$$a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \text{ pro } q \in (-1, 1)$$

Pro $a_1 \neq 0, q \in (-\infty, -1)$ řada osciluje, pro $a_1 > 0, q \in \langle 1, \infty \rangle$ řada určitě diverguje k $+\infty$, pro $a_1 < 0, q \in \langle 1, \infty \rangle$ řada určitě diverguje k $-\infty$.