Urči, zda řada konverguje / diverguje:

1.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2} =$$

PODÍLOVÉ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\,n!\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}\,\cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1n^2+\dots}{4n^2+\dots} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} < 1$$

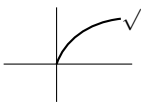
Řada konverguje

2.) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n + 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n + 1}{n^2} = \frac{\langle 0,1\rangle + 1}{\infty} = \frac{\langle 1,2\rangle}{\infty} = \underline{0}$$

alternující → LEIBNIZOVO

Řada konverguje

3.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n-1} =$$ ověříme nutnou podmínku konvergence (všimneme si, že řada roste) $$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1} = \infty \neq 0$$



Řada DIVERGUJE

4.) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}$$

LEIBNIZOVO

Řada KONVERGUJE

5.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n = \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\pi}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{3{,}14\dots}{3} \underline{\underline{> 1}}$$

ODMOCNINOVÉ

ŘADA DIVERGUJE

6.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n + 1}{2n^2} = \sum \frac{\langle 0,1\rangle + 1}{2n^2} = \sum \frac{\langle 1,2\rangle}{2n^2} = \boxed{\sum \frac{\langle \frac{1}{2},1\rangle}{n^2}} \overset{*}{\leq} \boxed{\sum \frac{1}{n^2}}$$

Srovnávací s řadou $\frac{1}{n^2}$

VÍME, že KONVERGUJE TATO ŘADA

Proto i naše řada KONVERGUJE

*

Urči obor konvergence

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

1. střed $x_0 = 0$

2. poloměr $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

3. obor konvergence pro $x \in (0-1,\, 0+1) = (-1, 1) = \langle -1,\ 1\rangle$
? ? = =

$\boxed{x=-1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (-1)^n =$ Alternující LEIBNIZOVO $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 \neq 0$ — Řada DIVERGUJE

$\boxed{x=1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Rightarrow$ neplatí nutná podmínka konvergence $\Rightarrow$ řada diverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} \cdot (x-2)^n$

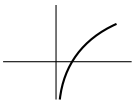
1. střed $x_0 = 2$

2. poloměr:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+2)}}{\frac{1}{\ln(n+1+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+2)}}{\frac{1}{\ln(n+3)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} = \frac{\ln\infty}{\ln\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$



3. obor konvergence $x \in (2-1,\, 2+1) = (1,3) = \langle 1, 3\rangle$
? ? = =

$\boxed{x=1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}(-1)^n \longrightarrow$ LEIBNIZ: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} = \frac{1}{\infty} = 0$ ✓ KONV

$\boxed{x=3}$: $\sum \frac{1}{\ln(n+2)} 1^n \longrightarrow$ Srovnávací $\frac{1}{n}$ DIVERG. $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n+2)} \quad / \cdot n\ln(n+2)$ — DIV

$\ln(n+2) < n$ platí $\Rightarrow \sum \frac{1}{\ln(n+2)}$